

蕴含权重的偏序集多准则决策法

岳立柱¹, 张志杰², 闫艳³

(1. 辽宁工程技术大学 公共管理与法学院, 阜新转型发展研究院, 辽宁 阜新 123000; 2. 辽宁工程技术大学 创新实践学院, 辽宁 阜新 123000; 3. 辽宁工程技术大学 工商管理学院, 辽宁 阜新 123000)

摘要: 针对偏序集方法不能解决含有权重的多准则决策问题, 提出一种“隐式”赋权的偏序决策方法。首先将含有 m 个方案和 n 个准则的决策问题表示成偏序集, 之后按权重由大到小的顺序, 对准则进行逐步相加形成 n 个新的准则, 得到一个新的偏序集。根据偏序集间的包含关系, 证明了新偏序集不仅蕴含了权重信息, 而且比初始偏序集有更强的排序能力。结果表明, 该法在应用中仅需获取权重排序信息, 无需精确权重, 适用于权重难以确定的多准则决策问题。以三峡库区水质评价为例, 例子表明新方法明显优于原有的偏序决策方法, 能够对 13 个方案进行聚类 and 排序, 而原有方法在该例中几乎难以应用。

关键词: 偏序集; 多准则决策; 权重; 评价集

中图分类号: C934 **文章标识码:** A **文章编号:** 1007-3221(2018)02-0026-06 **doi:** 10.12005/orms.2018.0031

Multi Criteria Decision Making Method of Poset with Weight

YUE Li-zhu¹, ZHANG Zhi-jie², YAN Yan³

(1. *Public Administration and Law of Liaoning Technical University, School, Fuxin Institute for Transformation and Innovation Development, Fuxin 123000, China*; 2. *College of Innovation and Practice of Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China*; 3. *School of Business Administration of Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China*)

Abstract: In view of the partial order set method that can not solve the multi criteria decision problem which contains weight, this paper proposes a multi criteria decision making method with implicitly empowering weights. First it is expressed as a poset which contains n scheme and m criteria decision problem, then forms a new poset which contains m criteria according to the weight order. The poset relationships which contain each other prove that the new poset not only contains the weighted information, but also has a stronger ability of sorting. This way it only needs weight order without concrete weight in exercising, which is suitable for the multi criteria decision making problems whose weight is difficult to determine. This paper takes the Three Gorges reservoir water quality evaluation as an example, showing that the new method is superior to the original partial order set, and it can cluster and sort 13 schemes, but the original method is hardly applied to this example.

Key words: poset; multiple criteria decision making; weight; evaluation set

0 引言

偏序集决策是对具有多个准则的有限方案, 通过准则建立方案间的偏序关系, 进而对方案进行选择 and 排序的多准则决策方法。偏序集决策是一个非常具有吸引力的决策支持工具^[1], 它不假定数据

间是否具有线性关系, 也不假定数据分布特征^[2], 在应用过程中, 仅需要获取数据序数性质、避免赋权的主观性, 进而保持一个高标准的客观性^[3]。偏序集决策方法独具特色, 不仅能对方案进行排序, 还能通过 Hasse 图直观展示方案间的结构关系。例如, Halfon 根据化学品污染评价准则, 应用 Hasse 图来展示各种化学品污染程度的比较关系,

收稿日期: 2016-06-14

基金项目: 辽宁省教育厅基金(LJCR007, LJCR010); 辽宁省社会科学规划基金(L15EJY00)

作者简介: 岳立柱(1976-) 男, 黑龙江省大庆人, 副教授, 博士, 研究方向: 模糊决策理论与方法; 张志杰(1973-) 女, 辽宁阜新人, 讲师, 博士, 研究方向: 决策理论与方法; 闫艳(1979-) 女, 辽宁阜新人, 博士研究生, 研究方向: 决策理论与方法。

进而对化学品危害程度进行评级,利用 Hasse 图解法对意大利使用 50 种农药进行排序,预测其中 16 种农药最有可能残留在水体中,对照在意大利波河的实际监测结果,预测准确率达 87.5%^[5]。Bruggemann 用偏序集理论对 81 个国家的财政制度进行研究,得到了财政制度设计的评价准则,通过 Hasse 图对各个国家进行聚类 and 排序,为制度的量化研究提供了一个新的视角^[3]。

虽然偏序集有独特的理论优势,并取得了一些成功的应用,但在决策应用领域理论体系还未成熟。从方法论上来看,偏序集决策是通过两个阶段来实现的:一是通过准则集建立方案间的偏序关系,由方案集和偏序关系构造出偏序集;二是通过偏序集对方案进行排序,并且应用 Hasse 图展示方案间的结构关系。当前,学者们的研究主要集中于第二个阶段,都是围绕偏序集的线性扩展构造排序和比较方法。对于一个偏序集而言,如果所有可能的线性扩展被发现,那么通过它可以计算单个元素的平均排名^[7],进而完成方案的比较。最初排序计算方法比较复杂,于是 Bruggemann^[8]通过上集、下集和区间集等概念,给出了一种简便计算方法。遗憾的是该方法在证明过程中存在漏洞,后来作者进行了完善,发现该公式是一个有效近似计算方法^[9]。Loof^[10]进一步对 Bruggemann 提出的计算方案在平均高度公式进行改进,改进后的公式提高了计算精度,但也损失了计算的简捷性。围绕第二阶段的研究方法面临一个共同的困境,即不能解决含有权重的多准则决策问题,即只能处理具有等权的多准则决策问题。事实上准则的重要性差异是客观存在的,忽略准则差异直接影响综合决策的质量和可靠性^[11]。

在偏序研究中,第二阶段主要是通过方案间的比较矩阵进行研究,不含准则和权重信息,因此,构建能够处理权重差异的多准则偏序方法,关键在于第一个阶段,即由评价方案集、准则集和权重向量构造一个能蕴含权重的偏序集。在着重考虑权重排序信息基础上,对原偏序集准则按权重顺序进行变换,构造出一个新的偏序集,并证明新偏序集蕴含了权重信息并且具有保序性,进而给出一种新的偏序决策方法。鉴于精确确定指标权重总是困难的,一是在很多实际问题中,总有一些属性无法或很难量化,决策者只能给出各属性的优劣次序^[12];二是准则权重反映了准则客观差异的同时,也反映了人的主观认识,权重总是具有随机性和一定的主观性。为此,着重考虑基于权重排序,通过准则的依次相加或相乘得到新的指标集,由此构造出新的偏序集,并证明有如何对原偏序集中的准则集进行

变换得到一个新的偏序集,在此基础上再应用目前的偏序决策方法。

1 传统偏序多准则决策方法

1.1 多准则决策的偏序集表示

多准则决策是指在考虑多个准则的情况下,选择最优备选方案或进行方案排序的决策问题,它是现代决策科学的一个重要组成部分。一般多准则决策可描述如下:

定义 1^[13] 称 (A, IC, F) 为评估模型,其中 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 为评估对象或方案集, a_i 为第 i 个评估对象; $IC = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ 为评价准则集, c_l 为第 l 个评估准则; $F = \{f_l: A \rightarrow V_l \mid l = 1, 2, \dots, m\}$ 为评估对象与评估准则之间的关系集,其中 $f_l(a_i)$ 表示评估对象 a_i 关于评估准则 c_l 的测定值, V_l 为属性 c_l 可能取值的全体,称为 c_l 的取值域。

由于各准则可能具有不同的量纲和不同的类型,例如有的准则为效益型,而有的准则为成本型,决策前需要对各数据进行规范化处理。设 $f_l(a_i)$ 经规范化处理后的值为 $c_l(a_i)$, $\rho_l(a_i)$ 表示 a_i 在准则 c_l 上规范化取值。设准则集 IC 的权重向量为

$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, 其中 $\omega_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ 。

定义 2^[13] 称 (A, R) 为评估关系模型,其中 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 为评估对象集, R 为评估对象之间的关系集,即 $R = (R_{ij})_{n \times n}$, 其中 $R_{ij} = R(x_i, x_j)$ 表示 x_i 和 x_j 的一个二元关系。

评估模型与评估关系模型有本质上的区别,评估模型是由评估对象集、属性集、属性值集组成,表现形式为数据表;评估关系模型由评估对象集、评估对象间的二元关系组成^[14]。在偏序多准则决策模型中,二者之间的转换方式如下^[10, 15]:

对于 $\forall x, y \in A$, 二者之间的偏序关系“ \leq ”定义为

$$x \leq y \Leftrightarrow c_j(x) \leq c_j(y), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

由于关系 \leq 为 A 上的偏序关系,因此 (A, \leq) 为偏序集。为了区分由不同准则集生成的偏序关系,文[8]用 (A, IC) 表示偏序集 (A, \leq) 。为了避免理解上的歧义,下文在必要时用 (A, \leq_{IC}) 表示偏序集 (A, \leq) 。

1.2 偏序集决策分析方法

定义 3^[16] 设 $(A, \leq_{IC_1}), (B, \leq_{IC_2})$ 为偏序集, $f: A \rightarrow B$ 是映射:若 $\forall x, y \in A, x \leq_{IC_1} \Rightarrow f(x) \leq_{IC_2} f(y)$, 则称 f 是单调映射(或称保序映射或序同态)。若 f 为保序的双射且 $f(x) \leq_{IC_2} f(y) \Rightarrow x \leq_{IC_1}$

y 则称 f 为同构映射。

设 (A, \leq_{IC_1}) 是偏序集, (A, \leq_L) 为一线性序, 若存在映射 φ φ 是从 (A, \leq_{IC_1}) 到 (A, \leq_L) 上的保序映射, 则称 (A, \leq_L) 为 (A, \leq_{IC_1}) 的线性扩展。关于线性拓展的直观图解可参加文 [17]。由于线性扩展 (A, \leq_L) 为一全序, 有 m 个元素, 按由小到大的顺序分别赋予秩次 $1, 2, \dots, m$, 于是对 $\forall x \in A$, $rank(x) = i$ 表示 x 处于线性扩展上秩次为 i 。对于 x 在 (A, \leq_{IC_1}) 所有线性扩展上的秩均值 $\rho(x)$, Winkler 给出如下公式^[6]:

$$\rho(x) = \frac{\sum rank(x, linear\ order\ j)}{LT} \quad (2)$$

$rank(x, linear\ order\ j)$ 表示方案 x 在第 j 个线性扩展上的秩次, LT 表示 (A, \leq_{IC_1}) 线性拓展的总数量。对于式 (2), 另一种等价表示形式为^[10]:

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^m i \cdot P(rank(x) = i) \quad (3)$$

其中 $P(rank(x) = i)$ 表示元素 x 秩次等于 i 的概率。

根据式 (2) 或式 (3) 计算各方案的秩均值, 通过秩均值对方案进行排序。需要注意的是, 给定一个偏序集 (A, \leq_{IC_1}) , 式 (2) 和 (3) 的时间复杂度为 $O(n^2)$, 随着方案数量的增加, 经常会遇到难以计算的问题。

为此一些学者提出了近似的简化算法。Bruggemann 等^[8] 应用上集和下集的概念提出了一种简便, 即给定偏序集 (A, \leq_{IC}) , 对于 $\forall x \in A$, 称 $A_x^- = \{y | y \leq x, y \in A\}$ 为 x 在 (A, \leq_{IC_1}) 上的下集, 称 $A_x^+ = \{y | x \leq y, y \in A\}$ 为 x 在 (\leq_{IC}) 上的上集, 称 $A_x = A_x^- \cup A_x^+$ 为 x 在 (A, \leq_{IC}) 上的可比集, 则秩均值的近似计算公式为

$$\hat{\rho}_L(x) = \frac{(m+1) |A_x^-|}{|A_x^-| + |A_x^+|} \quad (4)$$

其中 $|A_x^-|$ 和 $|A_x^+|$ 分别表示集合 A_x^- 和 A_x^+ 的元素个数。文 [10] 在式 (4) 基础上提出两个主要改进公式, 在一定条件下提高了计算精度, 但计算过程较为复杂。

2 蕴含权重的偏序决策模型

从传统偏序决策流程可以看出, 在多准则决策中没有考虑准则的差异性问题。但在实际应用中, 指标重要性差异是普遍存在的, 不考虑准则的客观差异, 影响了评价结果的效度。为了提取权重信息, 首先通过权重秩次在原偏序集基础上构造一个新的能够蕴含权重信息的偏序集, 再应用偏序决策方法

进行分析。从式 (1) 可以看出, 若两个方案是可比较的, 那么无论准则权重如何变化, 二者的比较关系是不变的, 因此构造出的新偏序集一定要具有保序性。下面通过一些理论铺垫, 证明通过权重信息变换后的偏序集具有保序性, 并进一步揭示新偏序集方法与原偏序集方法、线性模型之间的理论关系。

2.1 理论准备

性质 1 设偏序集 (A, \leq) , 对于 $\forall x, y \in A$, 则有: 1) $x \in A_y^- \Leftrightarrow y \in A_x^+$; 2) $x \leq y \Leftrightarrow A_x^- \subseteq A_y^-$ 。

证明 由上集和下集概念可知 (1) 成立, 证略。对 (2) 进行证明

先证“ \Rightarrow ”, 由 $x \leq y$, 根据下集概念有 $x \in A_y^-$, 对 $\forall t \in A_x^-$, 知 $t \leq x \leq y$, 再由下集概念知 $t \in A_y^-$, 于是 $A_x^- \subseteq A_y^-$ 成立。

再证“ \Leftarrow ”由 $A_x^- \subseteq A_y^-$, 知 $x \in A_y^-$, 根据下集概念得 $x \leq y$ 成立。

综上 2) 成立。

定义 4 设 A_x^- 和 B_x^- 分别为偏序集 (A, \leq_{IC_1}) 和 (B, \leq_{IC_2}) 的下集, 若对 $\forall x \in A$, 均有 $A_x^- \subseteq B_x^-$, 则称偏序集 (A, \leq_{IC_1}) 包含于偏序集 (B, \leq_{IC_2}) , 记 $(A, \leq_{IC_1}) \subseteq (B, \leq_{IC_2})$ 。

在上述定义 4 中, 两个偏序集的偏序关系是不同的。由于对 $\forall x \in A$, 均有 $A_x^- \subseteq B_x^-$, 可知 $A \subseteq B$ 。同时, 定义 4 与如下定理 1 是等价的。

定理 1 给定偏序集 (A, \leq_{IC_1}) 和 (B, \leq_{IC_2}) , 若 $\forall x \in A$, 有 $A_x^+ \subseteq B_x^+$, 则 $(A, \leq_{IC_1}) \subseteq (B, \leq_{IC_2})$ 。

证明 对 $\forall t, z \in A$, 设 $z \in A_t^-$, 由性质 1 可知 $t \in A_z^+$ 。由题设条件 $A_z^+ \subseteq B_z^+$, 知 $t \in B_z^+$, 再根据性质 1 有 $z \in B_t^-$, 即得 $A_t^- \subseteq B_t^-$, 由定义 1 可知 $(A, \leq_{IC_1}) \subseteq (B, \leq_{IC_2})$ 。

定理 2 设偏序集 $(A, \leq_{IC_1}) \subseteq (B, \leq_{IC_2})$, 对 $\forall x, y \in A$, 若 $x \leq_{IC_1} y$, 则有 $x \leq_{IC_2} y$ 。

证明 由于 $x, y \in A$, 由定义 1 可知 $x, y \in B$ 。当 $(A, \leq_{IC_1}) \subseteq (B, \leq_{IC_2})$, 根据定义 1 可知 $A_x^- \subseteq B_x^-$, $A_y^- \subseteq B_y^-$ 。由 $x \leq_{IC_1} y$ 可知 $x \in A_y^-$ 。又 $A_y^- \subseteq B_y^-$, 于是 $x \in B_y^-$, 根据 $x \leq_{IC_2} y$ 。证毕。

通过定理 2 可知, 若两个偏序集具有包含关系, 则评价方案具有保序性。

2.2 构造新偏序集及其保序性

虽然总有一些属性无法或很难量化, 但决策者容易给出各属性重要程度的优劣次序。鉴于决策的实践需要, 依赖准则权重大小排序(权重秩次), 对原偏序集 (A, \leq) 的准则进行变换, 得到一个蕴含权重信息的偏序集。

定义 5 设偏序集 (A, \leq) 各准则权重秩次 $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \dots \geq \omega_n$, 若依秩次对准则集 $IC = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ 进行变换得到 $IQ = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$, 其中 $q_i = \sum_{j=1}^i c_j, i = 1, 2, \dots, n$ 。则称 (A, IQ) 为 (A, IC) 的可加偏序集。

定理 3 设 (A, IQ) 为 (A, IC) 的可加偏序集, 则有 $(A, IC) \subseteq (A, IQ)$ 。

证明 为了表述方便, 记 $x \in A$ 在偏序集 (A, IC) 上的下集为 $IC_x = \{t | t \leq x, t \in A\}$, 在偏序集 (A, IQ) 上的下集为 $IQ_x = \{t | t \leq x, t \in A\}$ 。对于 $\forall t \in IC_x$, 即可知 $t \leq x \Leftrightarrow c_i(t) \leq c_i(x), i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow$

$$f(x, y) = \omega_1(c_1(y) - c_1(x)) + \omega_2(\sum_{i=1}^2 c_i(y) - \sum_{i=1}^2 c_i(x)) + \dots + \omega_n(\sum_{i=1}^n c_i(y) - \sum_{i=1}^n c_i(x))$$

$$g(x, y) = \omega_2(c_1(y) - c_1(x)) + \omega_3(\sum_{i=1}^2 c_i(y) - \sum_{i=1}^2 c_i(x)) + \dots + \omega_n(\sum_{i=1}^{n-1} c_i(y) - \sum_{i=1}^{n-1} c_i(x))$$

显然 $f(x, y) - g(x, y) = \sum_{i=1}^n \omega_i(c_i(y) - c_i(x)) = \Gamma(y) - \Gamma(x)$ 。下面只需证 $\Gamma(y) - \Gamma(x) \geq 0$ 。

由于 $\omega_i > 0, (\sum_{i=1}^i c_i(y) - \sum_{i=1}^i c_i(x)) \geq 0$, 故 $f(x, y)$ 表达式右端最末一项消去, 有

$$f(x, y) \geq \omega_1(c_1(y) - c_1(x)) + \omega_2(\sum_{i=1}^2 c_i(y) - \sum_{i=1}^2 c_i(x)) + \dots + \omega_{n-1}(\sum_{i=1}^{n-1} c_i(y) - \sum_{i=1}^{n-1} c_i(x))$$

将上式右端与 $g(x, y)$ 各项逐对比较, 由定义

5, 有 $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \dots \geq \omega_m$, 于是 $\omega_i(\sum_{t=1}^i x_t - \sum_{t=1}^i y_t) \geq \omega_{i+1}(\sum_{t=1}^i x_t - \sum_{t=1}^i y_t)$, 可得 $\omega_1(c_1(y) - c_1(x)) + \omega_2(\sum_{i=1}^2 c_i(y) - \sum_{i=1}^2 c_i(x)) + \dots + \omega_{n-1}(\sum_{i=1}^{n-1} c_i(y) - \sum_{i=1}^{n-1} c_i(x)) \geq g(x, y)$ 。

综上得到 $f(x, y) - g(x, y) \geq 0$ 。即由 $x \leq_{IQ} y$ 得到 $\Gamma(x) \leq \Gamma(y)$ 。

2.3 操作步骤

- (1) 对准则进行无量纲化处理;
- (2) 确定权重秩次;
- (3) 得到可加偏序集;
- (4) 绘制偏序集的 Hasse 图, 通过 Hasse 图对方案进行分类和排序;
- (5) 如果偏序满足精度则停止计算, 否则应用式(4)进行计算。

$\sum_{k=1}^i c_k(t) \leq \sum_{k=1}^i c_k(x), i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow t \in IQ_x$ 知 $IC_x \subseteq IQ_x$, 根据定义 4 可知 $(A, IC) \subseteq (A, IQ)$ 。

定理 4 设 (A, IQ) 为 (A, IC) 的可加偏序集, 对于 $\forall x, y \in A$, 若 $x \leq_{IQ} y$, 则 $\Gamma(x) \leq \Gamma(y)$, 其中

$$\Gamma(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i c_i(x), \Gamma(y) = \sum_{i=1}^n \omega_i c_i(y)$$

证明 由偏序关系知 $x \leq_{IC} y \Rightarrow q_j(x) \leq q_j(y)$,

$q_j = \sum_{i=1}^j c_i, j = 1, 2, \dots, n$ 。构造两个函数 $f(x, y), g(x, y)$ 表达式分别为

3 实例分析

对三峡库区重庆、长寿等城市江段 13 个监测断面, 运用偏序集的方法进行水质评价, 所用水质监测准则和数据均引自文献^[18]。水质评价采用了溶解氧(DO)、高锰酸盐(COD_{Mn})、化学耗氧量(COD_{Cr})、五日生化耗氧量(BOD₅)、总磷(TP)等 5 项非生物代表性准则作为准则集, 将各准则原始数据进行归一化后得到表 1(准则数值越大, 表示水质越好)。

表 1 原始数据归一化

代码	断面	DO	COD _{Mn}	COD _{Cr}	BOD ₅	TP
1	白沙	0.105	0.593	0.708	1.000	0.655
2	黄谦	0.474	0.593	0.308	0.000	0.195
3	望龙门	0.368	0.519	0.083	0.579	0.000
4	寸滩	0.316	0.481	0.000	0.526	0.164
5	黄草峡	0.316	1.000	0.125	0.105	0.425
6	鸭嘴石	0.158	0.222	0.917	0.368	0.473
7	美女礁	0.474	0.333	1.000	0.474	0.451
8	米市圈	0.368	0.593	0.600	0.263	0.447
9	九条沟	0.842	0.111	0.067	0.158	1.000
10	沱口	0.632	0.000	0.683	0.368	0.451
11	红砂礁	1.000	0.111	0.392	0.368	0.465
12	晒网坝	0.947	0.407	0.333	0.263	0.429
13	盐码头	0.000	0.222	0.642	0.895	0.429

三峡库区城市江段 13 个监测断面构成了评价集, 5 项评价指标构成了准则集, 得到初始偏序集 (A, IC) , A 为 13 个监测断面, 准则集为 $IC = \{c_1, c_2, \dots, c_5\}$ (具体代码见表 2)。原偏序评价方法, 首先根据式(1)和表 2 建立方案集的比较关系矩阵, 再由文[19]方法得到方案集 Hasse 矩阵, 绘制 (A, IC) 的 Hasse 图(见图 1)。通过图 1 看出, 白沙

(代码1)水质优于与盐码头(代码13)除此之外,任意两个断面的水质均无法比较优劣。

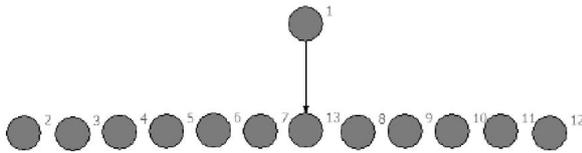


图1 偏序集的 Hasse 图

不考虑准则差异的偏序决策方法,几乎无法区分各断面水质的优劣。根据文[18]提供的准则权重(见表2)信息,应用本文的偏序集方法进行评价。

表2 各准则的权重赋值

准则代码	C_3	C_4	C_1	C_2	C_5
准则内容	DO	COD _{Mn}	COD _{Cr}	BOD ₅	TP
准则权重	0.2025	0.2023	0.2498	0.2033	0.1421
权重排序	3	4	1	2	5

先根据表2中给出权重秩次信息,构造(A, IC)的可加偏序集(A, IQ),其中 $IQ = \{q_1, q_2, \dots, q_5\}$ $q_i = c_1 + \dots + c_i, i = 1, \dots, 5$ 。根据表1数据,运算整理得到(A, IQ)比较关系矩阵(表3)。

表3 新偏序集中各方案的比较矩阵

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
白沙	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
黄谦	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
望龙门	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
寸滩	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
黄草侠	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
鸭嘴石	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
美女碛	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
米市圈	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
九条沟	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
沱口	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
红砂碛	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0
晒网坝	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
盐码头	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1

已知各监测断面的比较关系矩阵(或称可达矩阵),可得到各断面的邻接矩阵^[19],画出新偏序集的 Hasse 图(图2)。

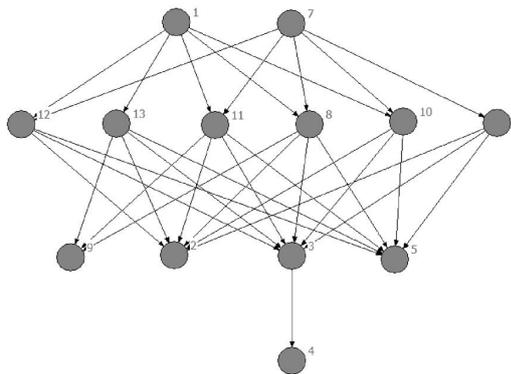


图2 监测断面的污染程度 HASSE 图

Hasse 图直观提供了各断面间的聚类信息。从图2可以看出13个监测断面可以划分为四个群体:

第一群体:白沙 美女碛;

第二群体:鸭嘴石,米市圈,沱口,红砂碛,晒网坝,盐码头;

第三群体:黄谦,望龙门,黄草侠,九条沟;

第四群体:寸滩。

该图2中,越是位于图上端的节点,表示的水质质量就越好。即白沙和美女碛两个截面水质状

况最好,第四群体即寸滩的水质状况最差。应用式(4)计算各个监测断面数值,得到排序:白沙 > 美女 > 碛盐码头 > 鸭嘴石 > 米市圈 > 红砂碛 > 沱口 > 晒网坝 > 望龙门 > 九条沟 > 黄谦 > 黄草侠 > 寸滩。本文方法不仅能对各个监测界面进行比较排序,同时有如下特点:

(1) 与原有偏序集方法相比,体现出了权重信息,提升了方案的比较能力。原偏序集决策方法视各指标是等权的,因此仅适用于权重差异不大的方案评价问题。本文方法解决了权重问题,拓展了原方法的适用范围,并且从理论上证明了能够提高方案的“分辨”能力。例如,通过比较图1和图2可见,在图1中仅有1对方案是可比的,除此之外所有方案不能比较优劣;在图2即新的偏序关系中有48对方案是直接可比的,是原可比数的48倍。

(2) 能够体现方案比较稳定程度。指标权重变化有时会导致排序翻转,对排序鲁棒性分析是评价方法不可或缺的一部分。根据保序性的证明,只要权重大小顺序不变,无论指标怎样变动,可比方案的优劣关系不变。例如,图2中节点1和节点3有向连通,节点1优于节点3,只要权重顺序保持不变即 $\omega_3 > \omega_4 > \omega_1 > \omega_2 > \omega_5$,无论各指标权重如何变动,节点1一定优于节点3。

(3) 能够体现出方案间的层集信息。通过

Hasse 图展示了 13 个方案可以分为四个层集,不同层集间的方案多是可以比较优劣,同层间的任意两个方案均不可以直接比较(如果进行比较排序,那么这种排序在一定概率条件下是可以翻转的)。层集信息同时提供了比较的一般性。例如,根据表 2 中的权重数据,采用线性模型对各指标进行集结,得到各截面的水质优劣比较:白沙 > 美女磧 > 晒网坝 > 红砂磧 > 米市圈 > 盐码头 > 鸭嘴石 > 沱口 > 九条沟 > 黄草侠 > 黄谦 > 望龙门 > 寸滩。该比较结果虽然与式(4)结果有所差异,但二者都遵循:第一层集方案优于第二层集,第二层集方案优于第三层集,第三层集方案优于第四层集。

另外,本文方法对解决非补偿指标集结问题提供了新思路。非补偿指标集结比较典型的是空气质量、水质质量等污染状况的综合评价问题。采用综合评价模型存在缺陷,某种污染物的浓度很高,远超过标准,其他污染物浓度较低,算出的综合指数不高^[20],但该污染指标有可能对造成足够大的危害。对这类集结,国际多采用按照“悲观”或“取大”准则计算,例如空气质量指数 AQI。在实际生活中,研究各种指标集对某事物影响的过程中,不仅指标集中的最大值具有最重要的作用,次大值等的作用也不容忽视,甚至具有与最大值类似的影响,因此,取大准则不免有些以偏概全。本文方法,同取大或取小准则相比,没有遗漏评价指标信息,考虑了所有指标的数值和权重;与综合评价方法相比,没有直接进行数值合成,如果一个方案所有指标(变换后)优于另一个方案,自然前者方案优于后者,解决了综合评价违背现实解释的问题。

4 结论

偏序集决策方法是一种非参决策方法,具有很好的鲁棒性。通过对评价集中准则的变换,即按照准则重要程度由大到小的顺序,对准则进行累加,构造出了一种含有权重信息的偏序集。新构造的偏序集不仅具有保序性,相对原偏序集有着更强的比较和排序能力。本文提出方法仅需准则权重的序数信息,因此是一种对权重依赖程度较低的多准则决策方法。在三峡库区 13 个监测断面水质评价案例中,蕴含权重的偏序集决策比较能力是原偏序方法的 48 倍,同时将 13 个监测面划分为四个不同污染等级的群体。在该例中,若各指标的权重发生了变化,但权重大小顺序不发生变动,则各 13 个监测断面的偏序结构不变,这充分反映了该方法鲁棒

性。不过,文中研究仅限于单层多准则问题,对于多层次多准则的决策问题需要进一步研究。

参考文献:

- [1] Lerche D, Brüggemann R, Sorensen P, et al. A comparison of partial order technique with three methods of multicriteria analysis for ranking of chemical substances [J]. *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*, 2002, 42: 1086-1098.
- [2] Carlsen L, Brüggemann R. Accumulating partial order ranking [J]. *Environmental Modelling & Software*, 2008, 23: 986-993.
- [3] Badinger H, Heinrich W. Reuter Measurement of fiscal rules: introducing the application of partially ordered set (POSET) theory [J]. *Journal of Macroeconomics*, 2015, 43: 108-123.
- [4] Halfon E, Reggiani M G. On ranking chemicals for environmental hazard [J]. *Environmental Science & Technology*, 1986, 20: 1173-1179.
- [5] Halfon E, Galassi S, Brüggemann R. Selection of priority properties to assess environment hazard of pesticides [J]. *Chemosphere*, 1996, 33(8): 1543-1562.
- [6] Winkler P M. Average height in a partially ordered set [J]. *Discrete Mathematics*, 1982, 39: 337-341.
- [7] Winkler P M. Correlation among partial orders [J]. *Siam Journal on Algebraic & Discrete Methods*, 1983, 4(1): 1-7.
- [8] Brüggemann R, Sorensen P, Lerche D, Carlsen L. Estimation of averaged ranks by a local partial order model [J]. *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*, 2004, 44: 618-625.
- [9] Brüggemann R, Annoni P. Average heights in partially ordered sets [J]. *Match Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 2014, 71: 101-126.
- [10] Loof K D, DeBaets H, Meyer D. Approximation of average ranks in posets [J]. *Match Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 2011, 66: 219-232.
- [11] Saisana M, Saltelli A, Tarantola S. Uncertainty and sensitivity analysis techniques as tools for the quality assessment of composite indicators [J]. *Journal of the Royal Statistical Society*. 2005, 168: 307-323.
- [12] 岳超源. 决策理论与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2003. 214-215.
- [13] 张文修, 仇国芳. 基于粗糙集的不确定性决策 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2005. 126-137.
- [14] 陈小卫, 王文双, 宋贵宝, 宋殿宇. 基于模糊偏序关系的混合型多属性决策方法 [J]. *系统工程与电子技术*, 2012, 34(3): 529-533.
- [15] Brüggemann R, Voigt K. An evaluation of online databases by methods of lattice theory [J]. *Chemosphere*, 1995, 31: 3585-3594.
- [16] 毛华. 偏序集理论在拟阵论中的应用 [D]. 西安电子科技大学, 2002. 5-6.
- [17] 杨学南, 郭春香. 基于偏序线性扩张的群决策方法 [J]. *西南科技大学学报*, 2007, 22(2): 86-91.
- [18] 邹志红, 孙靖南, 任广平. 模糊评价因子的熵权法赋权及其在水质评价中的应用 [J]. *环境科学学报*, 2005, 25(4): 552-556.
- [19] 范懿. 一个有关哈斯图的解析方法 [J]. *上海第二工业大学学报*, 2003, 1(1): 17-22.
- [20] 刘妍. 城市空气污染指数改进方案研究 [D]. 河北工业大学, 2011. 23-24.